Devoir sur Table 4

Durée : 4h

- Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1 Étude de la cissoïde droite

(*adapté de École de l'Air MP 2002*)

On désigne par D la droite d'équation $x = 2$ et par C le cercle de centre $M_0(-1, 0)$, de rayon 1.

Pour tout nombre réel t, on désignera par :
- $H(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et de la droite D.
- $M(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et du cercle C (avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(t)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

1. Donner une équation cartésienne du cercle C.
2. Déterminer les coordonnées de $M(t)$ et $H(t)$.

   On note $J(t)$ le milieu $J(t)$ du segment $[M(t), H(t)]$.
3. Vérifier que $J(t)$ a pour coordonnées $\begin{cases} x(t) = & \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = & \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$
4. Déterminer le vecteur dérivé à la courbe $t \mapsto J(t)$, puis en déduire les points stationnaires (c'est-à-dire non réguliers) de celle-ci.
5. En déduire que, pour $t_0 \neq 0$, la tangente à la courbe $t \mapsto J(t)$ au point $J(t_0)$ a pour équation $t_0(t_0^2 + 3)x - 2y = t_0^3$.

6. Étudier la nature du point $J(0)$.
7. Dresser le tableau des variations des coordonnées $x(t)$, $y(t)$ du point $J(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$
8. Représenter sur une même figure sur le papier millimétré joint, la droite D, le cercle C, et le support de cette courbe $t \mapsto J(t)$.
9. Montrer que le support de la courbe $t \mapsto J(t)$ est inclus dans la courbe d'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.
10. Réciproquement soit $M(x, y)$ un point de la courbe d'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$. Montrer qu'il existe un réel t tel que $M(x, y) = J(t)$.

Problème 1 Racines carrées d'un endomorphisme

(*adapté de CCINP PC 2010*)

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fine n

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E)\ ,\ h^2 = f\}$$

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie I

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique
5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2. .
6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$,
8. Déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

Partie II

Soit f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. (a) Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.
   (b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
10. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
11. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.
12. Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

13. (a) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f.
    (b) Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.
14. (a) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
    (b) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.
15. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie III

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \mathrm{Id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

16. (a) Calculer $(f - \lambda\mathrm{Id}) \circ (f - \mu\mathrm{Id})$.
    (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mu\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \lambda\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mu\mathrm{Id})$
    (c) Déterminer deux réels a et b tel que $a(X - \lambda) + b(X - \mu) = 1$
    (d) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu\mathrm{Id})$
    (e) Qu'en déduit-on sur f ?
17. Déduire de la relation trouvée dans la question 16.(a) que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

18. Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.
19. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$: $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$
20. Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.
21. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.
22. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.
23. Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que ${p'}^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
24. En déduire que si $\dim(E) \geqslant 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Problème 2

(adapté de EML ECS 2008)

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$ converge.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.

On admet que

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Partie I — Un produit scalaire sur E

1. Établir que

$$\forall (\alpha, \beta) \in [0, +\infty[^2 \qquad \alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

2. En déduire que, pour tout $(u, v) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$ converge.

On note $\langle \cdot , \cdot \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u,v) \in E^2$, associe $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On notera la présence du facteur $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. (a) Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Montrer que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
4. Démontrer que $\mathbb{R}[X] \subset E$.

On note encore $\langle \cdot , \cdot \rangle$ la restriction à $\mathbb{R}[X]$ ou à $\mathbb{R}_n[X]$, pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ sur E. On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ ou sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $\| \cdot \|$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$, définie, pour tout $u \in E$, par :$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

Partie II — Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$, où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.

En particulier : $H_0 = 1$.

5. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ *On fera figurer les calculs sur la copie.*
6. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
   (c) Contrôler alors les résultats obtenus en 5. et calculer H_4 *On fera figurer les calculs sur la copie.*
7. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.
8. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

   Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III — Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

9. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$
   $$\langle P', H_{n-1}\rangle = \langle P, H_n\rangle$$
   où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur F défini en 2..

   On pourra effectuer une intégration par parties

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $\langle P, H_n\rangle = 0$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est orthogonale dans $\mathbb{R}[X]$.
10. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Montrer que $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0\rangle$, où $\| \cdot \|$ est définie en 2.
    (b) En déduire la valeur de $\|H_n\|$.
12. On prend dans cette question $n = 2$.
    (a) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$
    (b) Déterminer, pour $k \in [\![0, 2]\!]^2$ $\langle X^k, H_0\rangle$ et $\langle X^k, H_1\rangle$
    (c) Donner la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. Le cercle C a pour équation
$$\boxed{(x+1)^2+y^2=1}$$
.

2. $\boxed{H(t) \text{ a pour coordonnées } (2,2t).}$

   $M(t)$ a des coordonnées de la forme (x,tx). De plus $H(t)\in C$ d'où $(x+1)^2+t^2x^2=1$ i.e. $(t^2+1)x^2+2x=0$.

   Ainsi $x=0$ ou $x=\dfrac{-2}{t^2+1}$. Comme $M(t)$ est distinct de O on en déduit que $\boxed{M(t) \text{ a pour coordonnées } \left(\dfrac{-2}{t^2+1},\dfrac{-2t}{t^2+1}\right)}$.

3. $J(t)$ a pour coordonnées
$$\left(\frac{2+\frac{-2}{t^2+1}}{2},\frac{2t+\frac{-2t}{t^2+1}}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{t^2+1},t-\frac{-t}{t^2+1}\right)=\left(\frac{t^2}{t^2+1},\frac{t^3}{t^2+1}\right)$$

   Ainsi $\boxed{J(t) \text{ a pour coordonnées } \begin{cases} x(t)= & \dfrac{t^2}{1+t^2}\\ y(t)= & \dfrac{t^3}{1+t^2}\end{cases}}$

4. La fonction $t\mapsto J(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $t\in\mathbb{R}$,
$$x'(t)=\frac{2t(1+t^2)-2t^3}{(1+t^2)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$
$$y'(t)=\frac{3t^2(1+t^2)-2t^4}{(1+t^2)^2}=\frac{t^4+3t^2}{(1+t^2)^2}$$

   $\boxed{\text{Le vecteur dérivé à la courbe } t\mapsto J(t) \text{ est le vecteur de coordonnées } \dfrac{1}{(1+t^2)^2}\left(2t,t^4+3t^2\right).}$

   On a $J'(t)=0_{\mathbb{R}^2}$ si et seulement si $t=0$.

   $\boxed{\text{Le point de paramètre 0 (i.e. le point } O \text{ est l'unique point singulier de la courbe.}}$

5. Soit $t_0\neq 0$, la tangente à la courbe $t\mapsto J(t)$ au point $J(t_0)$ est dirigée par le vecteur $J'(t_0)$ donc, a fortiori par le vecteur de coordonnées $(2,t_0(t_0^2+3))$.

   Elle admet ainsi une équation de la forme $t_0(t_0^2+3)x-2y=K$ où $K\in\mathbb{R}$.

   Or le point $J(t_0)$ appartient à la tangente, d'où
$$\begin{aligned}K&=t_0(t_0^2+3)\frac{t_0^2}{t_0^2+1}-2\frac{t_0^3}{t_0^2+1}\\&=\frac{t_0^2}{t_0^2+1}\left(t_0^3+3t_0-2t_0\right)\\&=\frac{t_0^2}{t_0^2+1}t_0\left(t_0^2+1\right)\\&=t_0^3\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\text{la tangente à la courbe } t\mapsto J(t) \text{ au point } J(t_0) \text{ a pour équation } t_0(t_0^2+3)x-2y=t_0^3.}$

   Équation

   De manière plus condensée, la tangente à pour équation $\begin{vmatrix} x-x(t_0) & x'(t_0)\\ y-y(t_0) & y'(t_0)\end{vmatrix}$

6. On effectue un développement limité en $t=0$.
$$x(t)=\frac{t^2}{1+t^2}\underset{t\to 0}{=}t^2(1-t^2+o(t^3))=t^2-t^4+o(t^5)$$

$$y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \underset{t\to 0}{=} t^3(1 - t^2 + o(t^2)) = t^3 - t^5 + o(t^5)$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Le point } J(0) \text{ est un point de rebroussement de première espèce.}}$ La tangente en $J(0)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, 0)$.

7. Sur $\mathbb{R}_+$ on obtient le tableau de variations suivant :

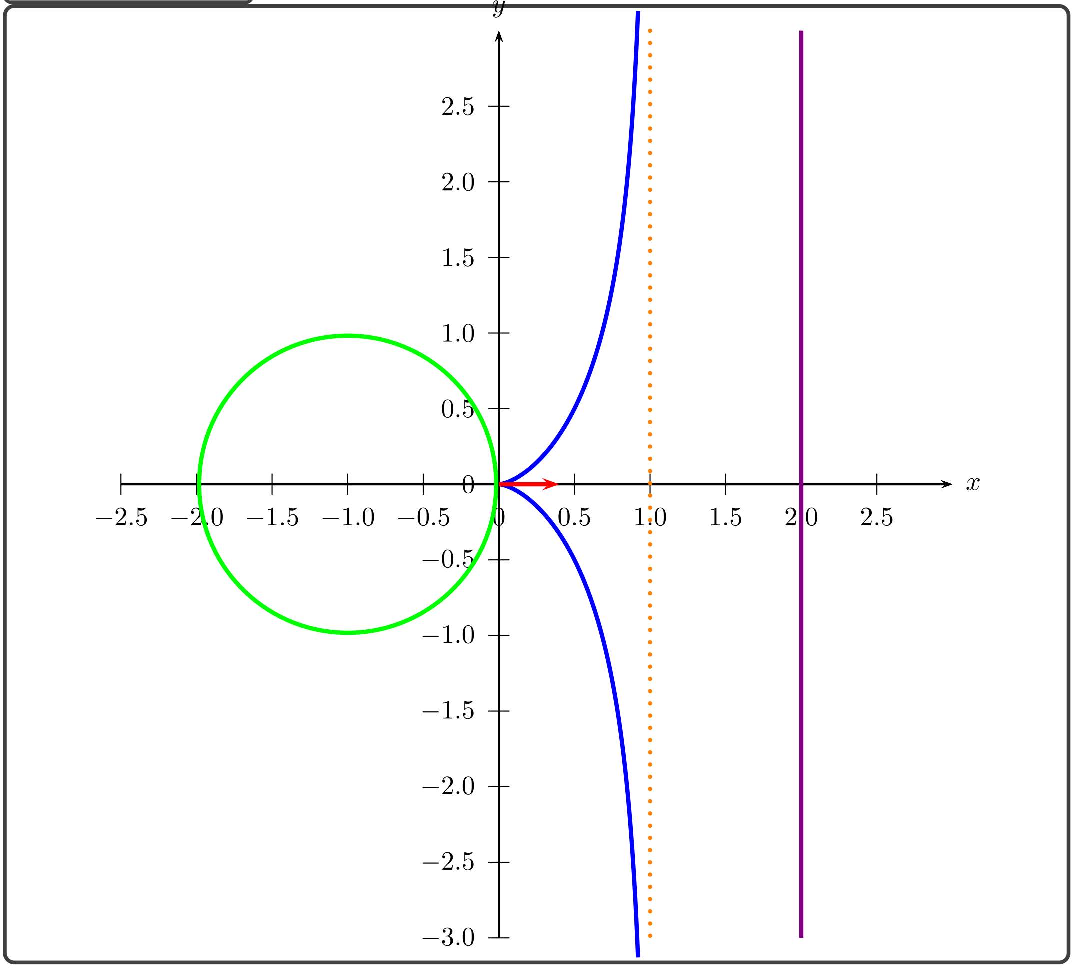
t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

8. x est paire et y est impaire, ainsi on obtient le support de la courbe sur $\mathbb{R}_-$ à partir du support de la courbe sur $\mathbb{R}_+$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

   De plus la courbe admet en $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$ une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

   On obtient le tracé suivant :

Figure .1 – Tracé



9. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) - y(t)^2 &= \frac{t^2}{t^2+1}\left(\frac{t^4}{(t^2+1)^2} + \frac{t^6}{(t^2+1)^2}\right) - \frac{t^6}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{t^6+t^8}{(t^2+1)^3} - \frac{t^6(t^2+1)}{(t^2+1)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{le support de la courbe } t \mapsto J(t) \text{ est inclus dans la courbe d'équation } x(x^2+y^2) - y^2 = 0}$

10. Soit $M(x, y)$ un point de la courbe d'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.

Si $x = 0$ alors $y = 0$ et $M(0, 0) = J(0)$.

Si $x \neq 0$ posons $t = \dfrac{y}{x}$. On a alors $x(x^2+t^2x^2) - t^2x^2 = 0$, d'où $x^2(1+t^2)\left(x - \dfrac{t^2}{1+t^2}\right) = 0$.

Puisque $x \neq 0$, on a donc $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$

Finalement, $\boxed{\text{si } M(x, y) \text{ vérifie } x(x^2+y^2) - y^2) = 0 \text{ alors il existe un réel } t \text{ tel que } M(x, y) = J(t).}$

Réponse du problème 1

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X-8 & -4 & 7 \\ 8 & X+4 & -8 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X-8 & -4 \\ 8 & X+4 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X & X \\ 8 & X+4 \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&= (X-1)X\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & X+4 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)X\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & X-4 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\
&= X(X-1)(X-4)
\end{aligned}$$

   χ_A est scindé à racines simples donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

2. Déterminons les vecteurs propres de A.

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ -8 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
E_0(A) &= \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
E_4(A) &= \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -8 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

   On prend alors $\boxed{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,-2,0),\ v_3 = (1,-1,0).}$

   La matrice de f dans cette nouvelle base est

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

3. D'après la formule de changement de base,

$$\begin{aligned}
A^m &= \mathrm{Mat}\mathcal{B}_{can}(f^m) \\
&= P_{\mathcal{B}_{can},(v_1,v_2,v_3)}\mathrm{Mat}(v_1,v_2,v_3)(f^m)P^{-1}_{\mathcal{B}_{can},(v_1,v_2,v_3)} \\
&= PD^mP^{-1}
\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a $\boxed{A^m = PD^mP^{-1}}$

   Méthode
   On aurait aussi pu procéder par récurrence sur m

4. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On inverse P par la méthode de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

Ainsi $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$

On a ensuite

$$\begin{aligned} A^m &= PD^mP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4^m \\ 0 & 0 & -4^m \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24^m & 4^m & 1 - 2 \times 4^m \\ -2 \times 4^m & -4^m & 2 \times 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base canonique est } \begin{pmatrix} 24^m & 4^m & 1 - 2 \times 4^m \\ -2 \times 4^m & -4^m & 2 \times 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

5. Soit $N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a alors

$$ND = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1,1} & 0 & 4n_{1,3} \\ n_{2,1} & 0 & 4n_{2,3} \\ n_{3,1} & 0 & 4n_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4n_{3,1} & 4n_{3,2} & 4n_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Les matrices qui commutent avec } D \text{ sont ainsi les matrices de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.}$$

6. Soit $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $H^2 = D$, alors $HD = HH^2 = H^3 = H^2H = DH$.

   Ainsi $\boxed{\text{si } H^2 = D \text{ alors } H \text{ et } D \text{ commutent.}}$

7. Soit $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$. Alors, comme H et D commutent, H est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

   Ainsi $H^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = D$, d'où $a \in \{-1, 1\}$, $b = 0$ et $c \in \{-2, 2\}$.

On vérifie facilement que ces matrices conviennent.

Les quatre matrices vérifiant $H^2 = D$ sont alors

$$\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}$$

8. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$, alors sa matrice H dans la base (v_1, v_2, v_3) vérifie $H^2 = D$.

   Leurs matrices dans la base canonique sont alors les matrices PHP^{-1} où H est une des quatre matrices obtenues précédemment.

   Plus précisément ce sont les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique sont

$$\boxed{\begin{pmatrix}4&2&-3\\-4&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&2&-5\\-4&-2&4\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-4&-2&5\\4&2&-4\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-4&-2&3\\4&2&-4\\0&0&-1\end{pmatrix}}$$

Partie II

9. (a) On a $J^2 = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$

   On montre ensuite par une récurrence simple que, pour tout entier $m \geqslant 1$, $\boxed{J^m = 3^{m-1}J}$

   (b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Travaillons avec les matrices A et J. On a $A = J + I_3$. Comme J et I_3 commutent, la formule du binôme donne

$$A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1}\right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*,\ f^m = \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j.}$

   Comme Id = Id $\boxed{\text{la relation est encore valable pour } m = 0}$.

10. On a, après calcul, $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$. Donc $\boxed{f \text{ admet les deux valeurs propres distinctes } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4.}$

11. D'après la question 9.(b)., pour tout entier $m \geqslant 0$, on peut écrire $f^m = 1^m(\mathrm{Id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$.

    En posant $p = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$, on obtient l'existence de la décomposition voulue .

    Supposons maintenant qu'il existe une autre décomposition (p', q'), alors $\mathrm{Id} = p' + q'$ (pour $m = 0$) et $f = p' + 4q'$ (pour $m = 1$). Donc $p' = \frac{1}{3}(4\mathrm{Id} - f) = p$ et $q' = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id}) = q$, ce qui nous donne l'unicité.

    Enfin, supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $ap + bq = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. On a alors $a\mathrm{Id} + \frac{b-a}{3}j = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Les endomorphismes Id et j étant libres on a ainsi $a = 0$ et $a - b = 0$ d'où $b = 0$.

    Finalement $\boxed{\text{Il existe un unique couple } (p, q) \text{ d'endomorphismes de } \mathbb{R}^3 \text{ tel que pour tout entier } m \geqslant 0,\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q. \text{ De plus ces endomorphismes } p \text{ et } q \text{ sont linéairement indépendants.}}$

12. On obtient, en utilisant les expressions de p et q trouvées à la question précédente :

$$\boxed{p^2 = p,\ q^2 = q,\ p \circ q = q \circ p = 0}$$

    Soit maintenant $h = \alpha p + \beta q$ tel que $h^2 = f$. Alors

$$h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = p + 4q.$$

Comme (p,q) est une famille libre, cette égalité équivaut à $\alpha^2=1$ et $\beta^2=4$.

Ainsi il y a 4 endomorphismes h solutions, ce sont

$$\boxed{p+2q=\mathrm{Id}+\frac{1}{3}j,\quad p-2q=\mathrm{Id}-j,\quad -p+2q=-\mathrm{Id}+j,\quad -p-2q=-\mathrm{Id}-\frac{1}{3}j}$$

13. (a) La matrice A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral elle est donc diagonalisable. Ainsi $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

On détermine les sous-espaces propres de f :

$E_1(f)=\mathrm{Vect}(w_1,w_2)$ avec $w_1=(1,-1,0)$ et $w_2=(0,1,-1)$,

$E_4(f)=\mathrm{Vect}(w_3)$ avec $w_3=(1,1,1)$.

Donc (w_1,w_2,w_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

(b) Notons $\mathcal{B}=(w_1,w_2,w_3)$. Alors :

$$\boxed{D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},\qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

14. (a) On peut prendre par exemple :

$$\boxed{K=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad Y=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

(b) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est Y. Comme $Y^2=D$ ainsi $\boxed{h^2=f.}$

De plus $\boxed{h \text{ n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q}$, car Y n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$.

15. Soit h un endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que $h^2=f$ et notons M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $M^2=D$ alors en particulier M et D commutent. Ainsi, après calcul M est de la forme $\begin{pmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&e\end{pmatrix}$.

Notons $N=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, on a alors $M^2=\left(\begin{array}{c|c}N^2&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&4\end{array}\right)$

N est ainsi la matrice d'une symétrie de $\mathbb{R}^2$, elle est donc diagonalisable. Soit $Q\in\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que QNQ^{-1} soit une matrice diagonale Δ.

Posons $P=\left(\begin{array}{c|c}Q&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&1\end{array}\right)$. On a $P\left(\begin{array}{c|c}Q^{-1}&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&1\end{array}\right)=I_3$ ainsi P est inversible.

De plus

$$PNP^-1=\left(\begin{array}{c|c}Q&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}N&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&e\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}Q^{-1}&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}QNQ^{-1}&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&e\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\Delta&0_{2,1}\\\hline 0_{1,2}&e\end{array}\right)$$

Ainsi N est diagonalisable et donc $\boxed{h \text{ est diagonalisable.}}$

Partie III

16. (a) On a

$$\begin{aligned}(f-\lambda\mathrm{Id})\circ(f-\mu\mathrm{Id})&=f^2-(\lambda+\mu)f+(\lambda\mu)\,\mathrm{Id}\\&=\lambda^2p+\mu^2q-(\lambda+\mu)\lambda p-(\lambda+\mu)\mu q+\lambda\mu p+\lambda\mu q\\&=0_{\mathcal{L}(E)}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{(f-\lambda\mathrm{Id})\circ(f-\mu\mathrm{Id})=0_{\mathcal{L}(E)}.}$

(b) On a $(f-\lambda \mathrm{Id})\circ(f-\mu \mathrm{Id}) = (f-\lambda \mathrm{Id})\circ(f-\mu \mathrm{Id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{Im}(f-\mu \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}) \quad \text{et} \ \mathrm{Im}(f-\lambda \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f-\mu \mathrm{Id})}$$

(c) Il suffit de prendre $\boxed{a = \dfrac{1}{\mu-\lambda} \text{ et } b = \dfrac{-1}{\mu-\lambda}.}$

(d) Soit $x \in E$, on a alors $x = a(f(x)-\lambda x) + b(f(x)-\mu x)$

Or $f(x)-\lambda x \in \mathrm{Im}(f-\lambda \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f-\mu \mathrm{Id})$ et $f(x)-\mu x \in \mathrm{Im}(f-\mu \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id})$.

Ainsi $E = \mathrm{Ker}(f-\mu \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id})$.

De plus $\mathrm{Ker}(f-\mu \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id})$ sont des espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes, ils sont donc en somme directe.

D'où $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f-\mu \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}).}$

(e) On en déduit que $\boxed{f \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(f) \subset \{\lambda, \mu\}.}$

17. D'après la question 16., on a

$$0_{\mathcal{L}(E)} = (f-\lambda \mathrm{Id})\circ(f-\mu \mathrm{Id}) = (\mu-\lambda)q\circ(\lambda-\mu)p.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\boxed{q\circ p = 0}$.

De même, comme $(f-\mu \mathrm{Id})\circ(f-\lambda \mathrm{Id}) = 0$, on trouve $\boxed{p\circ q = 0}$.

Enfin, comme $\mathrm{Id} = p+q$, on obtient, en composant par p (resp. par q) : $\boxed{p = p^2}$ (resp. $\boxed{q = q^2}$).

18. Comme λ et μ sont non-nuls, f n'admet pas la valeur propre 0. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, et comme E est de dimension finie, $\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$

De plus, on a vu en 16. que $f^2 - (\lambda+\mu)f + (\lambda\mu)\,\mathrm{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, i.e. $f\circ(f-(\lambda+\mu)\mathrm{Id}) = -\lambda\mu \mathrm{Id}$.

D'où $f^{-1} = \dfrac{-1}{\lambda\mu}(f-(\lambda+\mu)\mathrm{Id})$. On remplace f et Id à l'aide de p et q, ce qui donne finalement $\boxed{f^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}p + \dfrac{1}{\mu}q.}$

19. On va montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.

Initialisation :

La relation $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ est vérifiée pour $m = 0, 1, 2$ d'après l'énoncé, et pour $m = -1$ d'après la question précédente.

Hérédité :

Soit $m \in \mathbb{Z}$, on suppose que $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$. Montrons qu'alors $f^{m-1} = \lambda^{m-1}p + \mu^{m-1}q$ et $f^{m+1} = \lambda^{m+1}p + \mu^{m+1}q$.

En composant par $f = \lambda p + \mu q$ on obtient

$$f^{m+1} = (\lambda p+\mu q)\circ(\lambda^m p+\mu^m q) = \lambda^{m+1}p^2 + \mu^{m+1}q^2 + \lambda\mu^m p\circ q + \mu\lambda^m q\circ p = \lambda^{m+1}p + \mu^{m+1}q$$

De même, en composant par $f = \lambda^{-1}p + \mu^{-1}q$ on obtient

$$f^{m-1} = (\lambda^{-1}p+\mu^{-1}q)\circ(\lambda^m p+\mu^m q) = \lambda^{m-1}p^2+\mu^{m-1}q^2+\lambda^{-1}\mu^m p\circ q+\mu^{-1}\lambda^m q\circ p = \lambda^{m-1}p+\mu^{m-1}q$$

Ce qui prouve la propriété voulue aux rangs $m-1$ et $m+1$ et achève la récurrence

On a donc montré que $\boxed{\forall m \in \mathbb{Z},\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q.}$

Récurrence

Une telle récurrence nous permet de prouver les cas $m \geqslant 0$ et $m \leqslant 0$ en même temps mais il aurait aussi été possible de rédiger deux récurrences.

20. Soient deux réels α et β tels que $\alpha p + \beta q = 0$.

En composant par p, on obtient $\alpha p = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $p \neq 0$. De même, en composant par q, on obtient $\beta = 0$.

Donc (p, q) est une famille libre et $\boxed{\dim(F) = 2}$.

21. Soit $h \in \mathcal{R}(f) \cap F$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha p + \beta q$ et $h^2 = f$

    Or, comme $p \circ q = q \circ p = 0$, $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = \lambda p + \mu q$.

    Comme (p, q) est une famille libre, on en déduit que $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$.

    On obtient 4 possibilités, qui, réciproquement, conviennent toutes.

    Par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \cap F = \{\sqrt{\lambda}p + \sqrt{\mu}q, \sqrt{\lambda}p - \sqrt{\mu}q, -\sqrt{\lambda}p + \sqrt{\mu}q, -\sqrt{\lambda}p - \sqrt{\mu}q\}}$$

22. Définissons la matrice K diagonale par blocs de la façon suivante :

$$K = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & I_{k-2} \end{array}\right)$$

    Un produit par blocs nous donne alors $\boxed{K^2 = I_k}$.

23. On va raisonner matriciellement.

    Appelons k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ ($k \geqslant 2$) et considérons une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. C'est également une base formée de vecteurs propres de p et de q car $p = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \mathrm{Id})$ et $q = \dfrac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda \mathrm{Id})$.

    De plus, dans la base $\mathcal{B}$, leurs matrices sont des formes suivantes

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_k & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{n-k} \end{array}\right), \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \left(\begin{array}{c|c} 0_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array}\right).$$

    Soit alors p' l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right)$$

    où la matrice $K \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ a été définie à la question précédente.

    De plus,

    - un produit par blocs donne $M^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, donc $p'^2 = p$,
    - des produits par blocs donnent $M\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)M = 0_n$, donc $p' \circ q = q \circ p' = 0_n$,
    - comme M n'est pas diagonale, $p' \notin F = \mathrm{Vect}(p, q)$.

    $\boxed{\text{L'endomorphisme } p' \text{ ainsi construit vérifie } p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F,\ p'^2 = p \text{ et } p' \circ q = q \circ p' = 0_{\mathcal{L}(E)}.}$

24. Si $\dim(E) \geqslant 3$, alors λ ou μ est d'ordre au moins 2. Supposons par exemple que c'est λ.

    Posons $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$, où p' est l'endomorphisme défini à la question précédente.

    On a alors $h^2 = \lambda p + \mu q = f$ par propriétés de p' et q, et pourtant $h \notin F$ car $p' \notin F$ et $\lambda \neq 0$.

    Ainsi, $\boxed{\text{si } \dim(E) \geqslant 3, \text{ alors } \mathcal{R}(f) \not\subset F.}$

Réponse du problème 2

Partie I — Un produit scalaire sur E

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $(\alpha - \beta)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geqslant 0$ D'où

$$\boxed{\forall (\alpha, \beta) \in [0, +\infty[^2 \qquad \alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}$$

2. Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

On sait que
$$\forall(\alpha,\beta)\in[0,+\infty[^2 \qquad \alpha\beta\leqslant\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$
Ainsi, en appliquant ce résultat à $|f|$ et $|g|$ on obtient
$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad 0\leqslant|f(t)g(t)e^{-t^2}|\leqslant\frac{f(t)^2+g(t)^2}{2}e^{-t^2}$$
et donc
$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad 0\leqslant|f(t)g(t)|\leqslant\frac{f(t)^2+g(t)^2}{2}$$
Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)^2+g(t)^2}{2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par théorème de comparaison pour les intégrales des fonctions *positives* on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)g(t)e^{-t^2}|\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente donc convergente}}$.

3. (a) La fonction constante égale à 0 appartient à E donc $E\neq\emptyset$.

   Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(f,g)\in E^2$. Alors $f+\lambda g$ est bien continue et on a $\left(f(t)+\lambda g(t)\right)^2=f(t)^2+2\lambda f(t)g(t)+\lambda^2g(t)^2$.

   Or les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)^2\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)^2\,\mathrm{d}t$ sont convergentes ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(t)+\lambda g(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$ converge et donc $f+\lambda g\in E$.

   Finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

   (b) Notons d'abord que si f et g sont deux éléments de E, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\langle f,g\rangle$ est bien définie et prend des valeurs réelles

   - Soit λ un réel et soit f, g et h trois éléments de E. Alors
   $$\begin{aligned}\langle f,g+\lambda h\rangle&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(g(x)+\lambda h(x)\right)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)e^{-x^2}+\lambda f(x)h(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)h(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\langle f,g\rangle+\lambda\langle f,h\rangle\end{aligned}$$
   Ainsi l'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ est linéaire à droite
   - Soit f et g deux éléments de E, on a alors
   $$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\langle g,f\rangle$$
   Ainsi l'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ est symétrique, comme elle est linéaire à droite elle est donc aussi linéaire à gauche.
   - Soit $f\in E$, on a
   $$\forall x\in\mathbb{R},f(x)^2e^{-x^2}\geqslant 0$$
   Ainsi, par positivité de l'intégrale, on a
   $$\langle f,f\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)^2e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$$
   Ainsi l'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ est positive

- Soit $f \in E$ telle que $\langle f, f\rangle = 0$. On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 e^{-x^2} \geqslant 0$$

et que la fonction $x \mapsto f(x)^2 e^{-x^2}$ est *continue* sur $\mathbb{R}$.
Une fonction continue et positive d'intégrale nulle est nulle sur l'intervalle d'intégration, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^2 e^{-x^2} = 0$$

D'où, comme l'exponentielle ne s'annule jamais

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 0$$

C'est-à-dire $f = 0_E$.
Ainsi l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est définie positive.

Finalement $\boxed{\text{l'application } (f, g) \mapsto \langle f, g\rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

4. Soit $k \in \mathbb{N}$, Montrons que $x \mapsto x^k$ appartient à E.

Tout d'abord $x \mapsto x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ converge.

La fonction $x \mapsto \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale n'est impropre qu'en $-\infty$et $+\infty$

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\right)\Big) = 0$ par croissances comparées.

Ainsi $\left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

De plus, pour $x \geqslant 1$ on a $\left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$;

Enfin l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge par critère de Riemann

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives nous donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1 +\infty \left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ donc la convergence de $\displaystyle\int_0 +\infty \left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

Comme la fonction $x \mapsto \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty} 0 \left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ converge également.

Remarque

Si f est paire alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x) \, \mathrm{d}x$ ont même nature et même valeur si elles convergent

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty} +\infty \left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ converge.

On a donc montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, x \mapsto x^k \in E$$

Or E est un espace vectoriel donc toute combinaison linéaire d'éléments de E est encore un élément de E. En particulier toute fonction qui peut s'écrire comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto x^k$ appartient à E.

On en déduit donc que toute fonction polynomiale appartient à E, c'est-à-dire $\boxed{F \text{ est contenu dans } E.}$

Partie II — Polynômes d'Hermite

5. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad w(x) = e^{-x^2}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad w'(x) = -2\,x\,e^{-x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad w''(x) = -2\,e^{-x^2} + (-2\,x)^2\,e^{-x^2} = (4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad w'''(x) = 8\,x\,e^{-x^2} + (4\,x^2 - 2)\,(-2\,x)\,e^{-x^2} = (-8\,x^3 + 12\,x)\,e^{-x^2}$$

.

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_1(x) = -e^{x^2}\left(-2\,x\,e^{-x^2}\right) = 2\,x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_2(x) = e^{x^2}\left((4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}\right) = 4\,x^2 - 2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_3(x) = -e^{x^2}\left((-8\,x^3 + 12\,x)\,e^{-x^2}\right) = 8\,x^3 - 12\,x$$

Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_1(x) = 2\,x, \quad H_2(x) = 4\,x^2 - 2 \ \text{ et } \ H_3(x) = 8\,x^3 - 12\,x.}$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(x) = (-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n)}(x)$$

En dérivant on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n'(x) = (-1)^n\,(2\,x)\,e^{x^2}\,w^{(n)}(x) + (-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n+1)}(x) = 2\,x\,H_n(x) - (-1)^{n+1}\,e^{x^2}\,w^{(n+1)}(x)$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n'(x) = 2\,x\,H_n(x) - H_{n+1}(x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)}$$

(b) On procède par récurrence sur n.

On sait déjà que H_0 est un polynôme de de degré 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que H_n est un polynôme de degré n. Ainsi H_n' est un polynôme de degré $n - 1$. On sait que $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$,

on a $\deg(2XH_n) = n+1 > \deg(H_n')$ ainsi $\deg(H_{n+1}) = n+1$ ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence

Ainsi $\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ H_n \text{ est un polynôme de degré } n.}$

⚠Attention

Si P et Q sont deux polynômes on a $\deg(P+Q) \boxed{\leqslant} \max(\deg(P), \deg(Q))$. Il y a égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ mais pas en général

(c) Soit x un réel. on a $H_0 = 1$, alors

$$H_1 = 2XH_0 - H_0' = 2X$$

$$H_2 = 2XH_1 - H_1' = 2X \times (2X) - 2 = 4X^2 - 2$$

$$H_3 = 2XH_2 - H_2' = 2X(4X^2 - 2) - 8X = 8X^3 - 12X$$

$$H_4 = 2XH_3 - H_3' = 2X(8X^3 - 12X) - (24X^2 - 12) = 16X^4 - 48X^2 + 12$$

Nous avons ainsi retrouvé les résultats de la question 6., de plus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_4(x) = 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12}$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons a_n le coefficient du terme de plus haut degré de H_n. Montrons par récurrence que $a_n = 2^n$

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 0$ on a $a_0 = 1 = 2^0$

<u>Hérédité :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $a_n = 2^n$. On peut donc écrire $H_n = 2^n X^n + Q$ avec $\deg(Q) leqslant n - 1$.

On a alors
$$H_{n+1} = 2XH_n - H'_n = 2^{n+1}X^{n+1} + 2XQ - H'_n$$
Or $\deg(2XQ - H'_n) \leqslant \max(\deg(2XQ), \deg(H'_n) \leqslant n$. Ainsi le monôme de degré $n+1$ de H_{n+1} est $2^{n+1}X^{n+1}$ et donc le coefficient de degré $n+1$ de H_{n+1} est 2^{n+1} ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

8. On va montrer par récurrence sur n la propriété
$$\mathcal{P}(n) : \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$
Initialisation :
Pour $n = 0$ on a bien $H_0(-x) = 1 = (-1)^0 H_n(x)$
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$
En dérivant on a alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -H'_n(-x) = (-1)^n H'_n(x)$$
D'où
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H'_n(-x) = (-1)^{n+1} H'_n(x)$$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} H_{n+1}(-x) &= 2(-x)H_n(-x) - H'_n(-x) \\ &= -2(-1)^n H_n(x) - (-1)^{n+1} H'_n(x) \\ &= -(1)^{n+1} \left(2xH_n(x) - H'_n(x)\right) \\ &= -(1)^{n+1} H_{n+1}(x) \end{aligned}$$
Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
On a donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)}$$
On en déduit que $\boxed{H_n \text{ est une fonction paire si } n \text{ est pair et } H_n \text{ est une fonction impaire si } n \text{ est impair.}}$

Partie III — Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

9. (a) Soit $P \in F$ et soit $A < 0$ et $B > 0$, on a
$$\begin{aligned} \int_A^B P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_A^B P'(x)(-1)^{n-1}e^{x^2}w^{(n-1)}(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n-1}\int_A^B P'(x)w^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n-1}\left[P(x)w^{(n-1)}(x)\right]_A^B + (-1)^n\int_A^B P(x)w^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n-1}\left[P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\right]_A^B + \int_A^B P(x)H_n(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n-1}\left[P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\right]_A^B + \int_A^B P(x)H_n(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$
Notons d le degré de P, on a alors $P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^d x^{n-1}e^{-x^2}$ et $P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} \underset{x\to-\infty}{\sim} x^d x^{n-1}e^{-x^2}$
Or, par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^d x^{n-1}e^{-x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^d x^{n-1}e^{-x^2} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} = 0$
On a donc
$$\lim_{A\to-\infty,\, B\to+\infty} (-1)^{n-1}\left[P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\right]_A^B = 0$$

De plus

$$\lim_{A\to-\infty,\, B\to+\infty} \int_A^B P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \langle P', H_{n-1}\rangle$$

$$\lim_{A\to-\infty,\, B\to+\infty} \int_A^B P(x)H_n(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \langle P, H_n\rangle$$

Finalement on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall P \in F, \qquad \langle P', H_{n-1}\rangle = \langle P, H_n\rangle}$$

(b) Soit $P \in F_{n-1}$, en itérant la formule précédente on obtient

$$\langle P, H_n\rangle = \langle P', H_{n-1}\rangle = \langle P'', H_{n-2}\rangle = \cdots = \langle P^{(n)}, H_0\rangle$$

Or, $\deg(P) \leqslant n-1$ donc $P^{(n)} = 0$ et donc $\langle P^{(n)}, H_0\rangle = 0$.

Ainsi

$$\forall P \in F_{n-1}, \qquad \langle P, H_n\rangle = 0$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$, supposons pour fixer les idées que $i < j$, on a alors $i \leqslant j-1$ et donc $H_i \in F_{j-1}$, ainsi, d'après le question précédente $\langle H_i, H_j\rangle = 0$.

$\boxed{\text{La famille } (H_0, \cdots, H_n) \text{ est donc bien une famille orthogonale}}$

10. La famille $(H_0, \cdots, H_n)$ est donc une famille orthogonale qui ne contient pas le polynôme nul, ainsi c'est une famille libre. De plus c'est une famille libre de cardinal $n+1$ dans F_n qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est donc une base de F_n.

11. Soit $n \in N$.

(a) On a vu précédemment que, pour $P \in F$ on a

$$\langle P, H_n\rangle = \langle P', H_{n-1}\rangle = \langle P'', H_{n-2}\rangle = \cdots = \langle P^{(n)}, H_0\rangle$$

En particulier pour $P = H_n$ on obtient

$$\boxed{\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n\rangle = \langle H_n^{(n)}, H_0\rangle}$$

(b) On a

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0\rangle$$

Or $H_0 = 1$ et H_n est un polynôme de degré exactement n de coefficient dominant 2^n, ainsi $H_n^{(n)} = n!2^n$. On a donc

$$\|H_n\|^2 = \langle n!2^n, 1\rangle = n!2^n$$

Ainsi

$$\boxed{\|H_n\| = \sqrt{n!2^n}}$$

12. (a) La famille (H_0, H_1) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$. Il nous suffit de la renormaliser D'après la question précédente $\|H_0\| = 1$ et $\|H_1\| = \sqrt{2}$.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } \left(\dfrac{H_0}{\|H_0\|}, \dfrac{H_1}{\|H_1\|}\right) = \left(1, \sqrt{2}X\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_1[X].}$

(b) Soit $k \in [\![0,2]\!]^2$, on a

$$\boxed{\langle 1, H_0\rangle = 1, \qquad \langle X, H_0\rangle = 0}$$

$$\boxed{\langle X^2, H_0\rangle = \langle \frac{1}{4}(H_2 + 2H_0), H_0\rangle = \frac{1}{2}}$$

Et

$$\boxed{\langle 1, H_1\rangle = 0, \qquad \langle X, H_1\rangle = \frac{1}{2}\|H_1\|^2 = 1}$$

$$\boxed{\langle X^2, H_1\rangle = \langle \frac{1}{4}(H_2 + 2H_0), H_1\rangle = 0}$$

(c) Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on sait que

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(Q) = \langle Q, H_0\rangle H_0 + \langle Q, \frac{H_1}{\|H_1\|}\rangle \frac{H_1}{\|H_1\|} = \langle Q, H_0\rangle H_0 + \frac{1}{2}\langle Q, H_1\rangle H_1$$

En notant $Q = aX^2 + bX + c$ on a ainsi

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(Q) = \frac{a+2c}{2}H_0 + \frac{b}{2}H_1 = bX + \frac{a+2c}{2}$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(p_{\mathbb{R}_1[X]}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Calcul

Comme $p_{\mathbb{R}_1[X]}$ est l'identité sur $\mathbb{R}_1[X]$ il suffisait en fait de déterminer $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$